RICHIAMI di ALGEBRA

PRODOTTO MATRICI e VETTORI

VETTORE RIGA x VETTORE COLONNA : in output produce uno scalare

$a = [a_1\ a_2 \cdots a_n]$

$b = [b_1\ b_2 \ldots b_n]^T$

$a * b = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$

NB: Il numero di colonne di a deve coincidere con il numero di righe di b

■ $a = [3\ 1\ 7]$

$b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$a \cdot b = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 + 7(-1) = 10$

MATRICE x MATRICE

$A \in \mathbb{R}^{m \times q}$ $B \in \mathbb{R}^{q \times n}$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mq} \end{bmatrix}$ (q colonne)

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & & b_{1n} \\ & & \\ b_{q1} & & b_{qn} \end{bmatrix}$ (q righe)

$C = A \cdot B = \in \mathbb{R}^{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \cdots + a_{1q}b_{q1} & \text{I riga x II colonna} & \cdots & \text{I riga x n colonne} \\ \text{II riga x I colonna} & \text{II riga x II colonna} & \cdots & \text{II riga x n colonne} \\ & & & \\ \text{m riga x I colonna} & \text{m riga x II colonna} & \cdots & \text{m riga x n colonne} \end{bmatrix}$

■ $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 7 & 1 \cdot 9 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 5 & 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 6 & 2 \cdot 9 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 5 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 & 59 & 13 \\ 50 & 57 & 11 \end{bmatrix}$

VETTORE COLONNA $m \times 1$ X MATRICE $m \times m$ ✗

VETTORE RIGA $1 \times n$ X MATRICE $m \times n$ ✗

VETTORE RIGA $1 \times n$ x MATRICE $n \times m$

$[a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n}] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1m} \\ & b_{22} & \\ a_{n1} & & b_{nm} \end{bmatrix} = [a \times \text{I colonna}\ \ a \times \text{II colonna} \cdots a \times n\text{-colonna}]$ vettore riga

MATRICE $m \times n$ X VETTORE RIGA $1 \times k$ ✗ $\forall k$

MATRICE $m \times n$ X VETTORE COLONNA $k \times 1$ ✗ $\forall k \neq n$

MATRICE $m \times n$ X VETTORE COLONNA $n \times 1$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \\ & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{I riga} \times b \\ \text{II riga} \times b \\ \\ m \text{ riga} \times b \end{bmatrix} = C \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ (vettore colonna)

SCALARE X MATRICE

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha * \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ & & \\ \alpha a_{m1} & & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$

PROPRIETÀ

$A \cdot B \neq B \cdot A$

DETERMINANTE

Si calcola unicamente per matrici quadrate

MATRICE 2×2

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det A = ad - bc$$

prodotto degli elementi nella diagonale meno il prodotto degli elementi nell'altra diagonale

MATRICE 3×3 regola di Sarrus

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$$

MATRICE n×n Teorema di Laplace

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad \text{per colonne}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad \text{per righe}$$

NB: conviene ragionare sulla riga/colonna che contenga più zeri

PROPRIETÀ del DETERMINANTE

- Se B è ottenuta scambiando 2 colonne (righe) di A, allora: $\det(B) = -\det(A)$
- Se una colonna (riga) è tutta nulla allora: $\det(A)=0$
- Se ad una colonna (riga) di A si sostituisce una combinazione lineare di altre colonne (righe) di A il determinante rimane invariato
- Se due righe (colonne) di A sono uguali allora: $\det A=0$
- Se moltiplico una riga (o colonna) di A per uno scalare α, allora $\det = \alpha \det A$
- Se moltiplico la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ per uno scalare α (αA), allora $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
- TEOREMA di BINET $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

NUCLEO, IMMAGINE e TEOREMI

NUCLEO/KERNEL di una applicazione lineare è un insieme di vettori

$$\ker(f) = \{ v \in V : f(v) = 0 \} \qquad f: \underbrace{V}_{\text{dominio}} \to \underbrace{W}_{\text{codominio}}$$

Il nucleo è un SSV del dominio V dell'applicazione lineare f e pertanto

$$0 \le \dim \ker(f) \le \dim V$$

- Se $\dim \ker(f) = 0$, l'unico vettore $v \in V$ tale per cui $F(v)=0$ è $v=0$ (vettore nullo) e l'applicazione lineare è INIETTIVA
- Se $\dim \ker(f) = \dim(V)$ allora necessariamente $\ker(f)=V$, e dunque f è l'applicazione che manda ad ogni elemento di V lo zero di $W \Rightarrow f: V \to 0$

Se si associa una matrice all'applicazione lineare, il nucleo della matrice è l'insieme dei vettori che rendono il sistema lineare omogeneo associato, ovvero

$$\ker(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$$

IMMAGINE Sia $f: V \to W$ una applicazione lineare tra spazi vettoriali, l'immagine di f è il sottospazio vettoriale di W formato da tutti quegli elementi $w \in W$ per i quali esiste $v \in V$ tale che $f(v)=w$

$$\mathrm{Im}(f) = \{ w \in W : \exists v \in V \text{ tale che } f(v)=w \} \le W$$

Se si associa una matrice all'applicazione lineare, l'immagine della matrice è costituita dalle righe linearmente indipendenti tra loro

TEOREMA della dimensione

$$\dim \mathrm{Im}(f) + \dim \ker(f) = \dim V$$

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{null}(A) = n$$

rank(A): numero di righe linearmente indipendenti tra loro

n: dimensione di A (numero di colonne della matrice)

Supponiamo il caso particolare in cui l'applicazione lineare è un ENDOMORFISMO ovvero una applicazione lineare $f: V \to V$ dallo spazio V in se stesso. Allora il teorema delle dimensioni dice che l'INIETTIVITÀ e SURIETTIVITÀ si implicano a vicenda e quindi l'applicazione è BIUNIVOCA. Dal punto di vista matriciale ciò significa che è possibile l'INVERTIBILITÀ della matrice stessa. Infatti, se $\ker A = \emptyset$ ($Ax = \emptyset \iff x = \emptyset$) $\Rightarrow$ $\text{rank}(A) = n$ ovvero si ha una matrice quadrata in cui le righe sono linearmente indipendenti ($\det \neq \emptyset \Rightarrow \exists A^{-1}$)

AUTOVALORI, AUTOVETTORI, AUTOSPAZI

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia $f: V \to V$ una applicazione lineare (endomorfismo di V). Data la matrice associata all'applicazione lineare, si definisce uno SCALARE λ è AUTOVALORE della matrice A se $\exists$ un VETTORE NON NULLO x (AUTOVETTORE associato a λ) tale che:

$$\boxed{Ax = \lambda x} \circledast$$

V_λ è un SSV di V ed è detto AUTOSPAZIO relativo all'autovalore λ, cioè l'insieme dei vettori $v \in V$ che soddisfano la $\circledast$, ovvero

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda I) = \{ v \in V / Av = \lambda v \}$$

NB: essendo un SSV, V_λ contiene anche il vettore nullo

Possiamo riscrivere la nella seguente forma

$$[A - \lambda I]\, x = \emptyset$$

Nelle ipotesi abbiamo imposto che è autovettore x non nullo, pertanto il nucleo di $(A - \lambda I)$, ovvero l'insieme dei vettori $x \in V$ tale che $(A - \lambda I)x = \emptyset$ non contenga il vettore nullo, ovvero deve essere che

$$\ker(A - \lambda I) \neq \emptyset$$

Se il $\ker$ è non nullo, non c'è iniettività perché, dal teorema delle dimensioni, il rango della matrice non eguaglia il numero di colonne della matrice, ovvero ci sono delle righe linearmente dipendenti tra loro che rendono il determinante della matrice nullo e quindi la matrice $(A - \lambda I)$ non è invertibile:

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = \emptyset = P(\lambda)}$$

$P(\lambda)$ è il determinante della matrice $(A - \lambda I)$ e viene definito POLINOMIO CARATTERISTICO di grado pari alle dimensioni della matrice di partenza A e che ha n radici in campo complesso e quindi al più n autovalori distinti

Lo SPETTRO di A è l'insieme dei suoi autovalori, mentre il RAGGIO SPETTRALE di A è l'estremo superiore dei moduli dei suoi autovalori, cioè:

$$\rho(A) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|$$

Sia A una matrice quadrata di ordine n e sia λ un suo autovalore. Si pone la MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA dell'autovalore λ e si indica con $m_a(\lambda)$, il numero che esprime quante volte è autovalore annullo il polinomio caratteristico

$$1 \leq m_a(\lambda) \leq n \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori coincide con la dimensione della matrice, giacché, in campo complesso, un polinomio di grado n ammette esattamente n radici contate con la loro molteplicità. Se lavoriamo in $\mathbb{R}$ invece la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori sarà minore o uguale alla dimensione della matrice:

$$\sum_{i=1}^{k} m_a(\lambda_i) \leq n \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \qquad \sum_{i=1}^{k} m_a(\lambda_i) = n \quad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

Data una matrice quadrata di ordine n e detto λ un suo autovalore, si definisce MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA di λ e si indica con $m_g(\lambda)$ la dimensione dell'autospazio relativo a λ (V_λ), ovvero il numero di autovettori linearmente indipendenti relativi all'autovalore λ. In termini pratici, per trovare la molteplicità algebrica, basta ricorrere al teorema delle dimensioni:

$$\dim V_\lambda = m_g(\lambda) = n - \text{rank}(A - \lambda I)$$

Essendo il $\det(A-\lambda I)=0$, significa che il rango della matrice non coincide mai con la dimensione della stessa e quindi la dimensione di V_λ, ovvero la molteplicità geometrica sarà sempre strettamente inferiore alla dimensione della matrice.
Esiste inoltre una relazione che lega la molteplicità algebrica con la molteplicità geometrica

$$\boxed{1 \le m_g(\lambda) \le m_a(\lambda) \le n} \quad \circledast$$

Questa relazione è fondamentale nella trattazione della diagonalizzabilità di una matrice

DIAGONIZZABILITÀ

CONDIZIONE NECESSARIA e SUFFICIENTE per la diagonalizzabilità di un endomorfismo in V (e quindi per la matrice ad esso associata) è che:

1) Il numero degli autovalori, contati con la loro molteplicità, sia pari all'ordine della matrice n. In $\mathbb{C}$ questa condizione è sempre verificata perché il polinomio di grado n ha esattamente n radici. Pertanto questa condizione è impossibile da trovare in $\mathbb{R}$
2) La molteplicità geometrica di ciascun autovalore coincida con la relativa molteplicità algebrica

$$m_a(\lambda) = m_g(\lambda) \quad \forall \lambda \text{ autovalore}$$

Ciò significa che se $m_a(\lambda)=\lambda$ l'autospazio relativo all'autovalore λ deve avere una base formata da λ autovettori linearmente indipendenti

Se le condizioni sono verificate, la matrice è diagonalizzabile, esistono le matrici S e D tali che

$$\boxed{\begin{aligned} AS &= DS \\ A &= S^{-1}DS \end{aligned}}$$

Nella notazione una data uguaglianza con la relazione $Ax=\lambda x$.
D in particolare è una MATRICE DIAGONALE che presenta, nella diagonale principale, gli autovalori della matrice A
S è una matrice diagonalizzante INVERTIBILE che ha come colonne gli autovettori associati ad ogni autovalore, ovvero ha come colonne i vettori che generano gli autospazi relativi ad ogni autovalore.
Affinché tutto funzioni D e S devono essere costruite in modo che la j-esima colonna di S contenga l'autovettore associato all'autovalore λ_0 e l'elemento diagonale della j-esima colonna di D sia proprio λ

Es

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det A = p(\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2 \qquad 2 \text{ autovalori distinti}$$

$\lambda_0 = 0 \quad m_a(0)=1 \Rightarrow m_g(0) = 3-\text{rank}(A-0I) = 1$ $\circledast$

$\lambda_1 = 2 \quad m_a(2)=2 \Rightarrow m_g(2) = 3-\text{rank}(A-2I) = 3-\text{rang}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$= 3-1=2$

La matrice è diagonalizzabile perché $m_a(2)+m_a(1)=n$ e perché $m_a(0)=m_g(0)=1$ e $m_a(2)=m_g(2)$

$$V_0 = \{v \in V \mid (A-0I)v=0\} = \ker(A-0I)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2y=0 \\ +x-2y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z=z \\ y=0 \\ x=2y-z=-z \end{cases} \qquad V=\begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

$$V_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

master COPY COPISTERIA

$V_2 = \{v \in V \,/\, (A-2I)v = \emptyset\} = \ker(A-2I)$ un certo 2 autovettori

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y + z$$

$V_1 \xrightarrow{\substack{y=0 \\ z=1}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad V_2 \xrightarrow{\substack{y=1 \\ z=0}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ V_2 & V_1 & V_0 \end{bmatrix}$$

NB. Una matrice è diagonalizzabile anche se non invertibile, come nel nostro caso. In effetti un autovalore è $\lambda = 0$ che rende la matrice con $\det = 0$

NB: se $m_a(\lambda) = 1 \Rightarrow m_g(\lambda) = 1$ dalla relazione

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n$$

Ciò significa che qualunque matrice con n autovalori distinti è diagonalizzabile perché $\forall \lambda \; m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1$

INVERTIBILITÀ

Una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è invertibile se e solo se è una matrice NON SINGOLARE ($\det A \neq 0$) e vale la seguente relazione

$$\boxed{AA^{-1} = I = A^{-1}A}$$

Le seguenti affermazioni sono equivalenti e caratterizzano una matrice A invertibile
- Il rango di A è n
- La trasposta A^T è invertibile
- Il nucleo della matrice è formato dal solo vettore nullo $\ker\{v \in V / Ax = 0\} \Leftrightarrow x = 0$
- Il sistema lineare $Ax = b$ ha una soluzione univocamente determinata
- Gli autovalori sono tutti diversi da 0

Il calcolo della matrice inversa può seguire molte tecniche

1) Si risolve il sistema $AA^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$n \times n$ equazioni
$n \times n$ incognite

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} = 1 \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2} = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} = 1 \end{cases}$$

2) Si pone alla destra della matrice A la matrice identità dello stesso ordine di A; otteniamo una matrice $B = (A|I)$. Successivamente si fa in modo che la matrice B diventi della forma $(I|A')$ con $A' = A^{-1}$, operando su B le usuali operazioni sulle righe:
- moltiplicare una riga di B per uno scalare diverso da zero
- sommare una riga di B un'altra riga di B moltiplicata per uno scalare
- scambiare le righe

$$B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_3 \\ \longrightarrow \\ R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} R_1 \to \frac{1}{2}R_1 \\ \longrightarrow \\ R_2 \to \frac{1}{4}R_2 \end{matrix}$$